

Apprendre à partir de la résolution de problèmes

« Pour apprendre des mathématiques, il ne s'agit plus de faire résoudre des problèmes, mais d'apprendre aux élèves à les résoudre »

Les enjeux vus par le socle

- ◆ Il est nécessaire de créer aussi tôt que possible à l'école primaire **des automatismes en calcul**.
- ◆ Il faut aussi **comprendre des concepts et des techniques** (calcul, algorithme) et les **mémoriser** afin d'être en mesure de les **utiliser**.
- ◆ La **maîtrise des principaux éléments de mathématiques** s'acquiert et s'exerce essentiellement par la **résolution de problèmes**, notamment à partir de situations **proches de la réalité**.

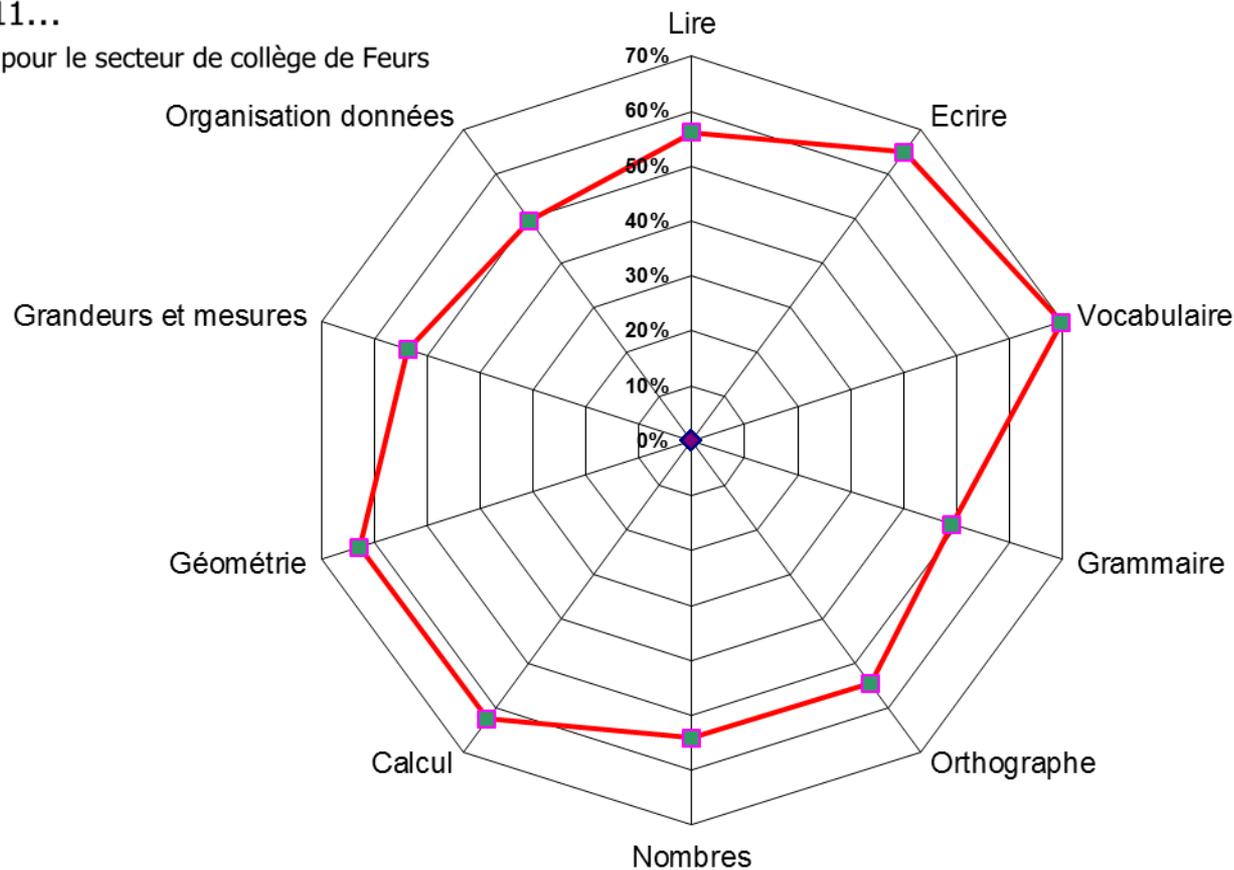
Une place centrale dans les programmes

- ◆ La **résolution de problèmes** joue un **rôle essentiel** dans l'activité mathématique. Elle est présente dans **tous les domaines** et s'exerce à **tous les stades** des apprentissages. (programmes, 2008)

Les constats dans la zone de Feurs

Evaluation CM2 - Résultats moyens par champ

- Évaluations CM2 2011...
 - Quelques tendances pour le secteur de collège de Feurs



Les constats dans la zone de Feurs

Organisation et gestion de données 7 items	Lire ou produire des tableaux et les analyser.	61	68%	56%	50%
		62	43%		
	Savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution.	63	34%	45%	
		96	63%		
		97	57%		
	Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité.	88	55%	42%	
		89	29%		

- **Résultats PISA/:** la France se situe au **22^{ème}** rang OCDE
- Des questions légitimes: est - ce un problème de ?
- ✓ **didactique** des mathématiques et de sa maîtrise
- ✓ **réflexion sur les différents concepts** pour construire des séquences efficaces.
- ✓ de **complexité** dans les situations proposées.
- ✓ **sens** (travail sur l'énoncé par exemple), sur l'appropriation du problème posé restent peu nombreuses.
- ✓ L'analyse des erreurs insuffisamment privilégiée.

Plan de l'animation

1 - Qu'est-ce que raisonner ?

2 - Apprendre à résoudre des problèmes

A - Construire une première représentation du problème

B - Développer des procédures et stratégies de résolution

C - Qu'est-ce qui permet de mieux raisonner ?

D - Rôle de l'enseignant.

Qu'est-ce que raisonner ?

- **Raisonner** demande d'être capable de faire des choix , de repérer des indices et de traiter l'information reçue **en faisant des inférences.**
- **Pour faire des inférences il faut :**
 - **Faire des hypothèses**
 - **Prévoir**
 - **Tester les conséquences des choix puis s'ils ne correspondent pas aux attentes être capable de revenir sur ces hypothèses**
 - **Construire des modèles mathématiques pour en éprouver leur portée et leurs limites**
 - **Réviser continuellement ses points de vue**

- **Raisonnement** demande des capacités de **catégorisation** et **d'anticipation**.
- Afin d'éviter les questions **redondantes ou inutiles** et de **construire pas à pas** un raisonnement, il est nécessaire de garder la trace, de **mémoriser** et **d'organiser les réponses** successives.
- Pour construire les informations efficaces à la résolution, les enfants doivent être capables de **coordonner plusieurs réponses entre elles** et de **faire des hypothèses** avec des informations déjà connues.
- Pour **déduire** de nouvelles informations à partir de celles qui sont déjà connues, les enfants sont amenés à utiliser plusieurs types d'**implication** dont la plus courante est le **recodage d'une information négative**, c'est à dire ils doivent être capables de comprendre qu'une réponse négative à une question est informative.

Trois catégories d'objectifs pour les problèmes

- **Utiliser ses connaissances** pour résoudre rapidement (immédiatement ou par étapes) certains problèmes : **problèmes pour apprendre par réinvestissement**
- **Mettre en place des stratégies** pour venir à bout de problèmes qu'on ne sait pas résoudre rapidement : **problèmes pour chercher**
- **S'approprier de nouvelles connaissances**, en partant de problèmes qui résistent aux connaissances déjà apprises : **situations-problèmes**

A - Problèmes « pour apprendre » permettant à l'élève de mettre en œuvre des connaissances acquises.

Problèmes d'approche ou de découverte

Ils engagent les élèves à utiliser leurs connaissances actuelles pour en percevoir les limites.

Problèmes d'application ou de réinvestissement

Ils réactivent la mémoire (à court ou moyen terme) et permettent à l'élève de mettre en œuvre des savoirs et savoir-faire acquis à l'école. **Il y a connaissance mais non apprentissage.** Des solutions expertes sont possibles.

Problèmes complexes

L'élève doit réunir plusieurs savoirs et savoir-faire. La résolution comporte plusieurs étapes qui ne sont pas toujours précisées. Il peut y avoir un travail spécifique de tri de données ou de questions, une recherche d'informations sur différents supports

B - Problèmes « pour chercher » permettant à l'élève **d'élaborer une solution personnelle** pour laquelle il ne possède pas de modèles de résolution ni de procédure préalablement explorée.

Problèmes dont la résolution peut-être faite par **essais**

Problèmes dont la résolution nécessite une **organisation** pour obtenir toutes les possibilités.

Problèmes dont la résolution privilégie le recours à la **déduction.**

Problèmes **ouverts**

Le « sens » des opérations nécessite un apprentissage

3 niveaux

Sens « primitif »

Sens « appris »

Raisonnement

Exemple pour la soustraction

Sens « primitif »

- En 2010, la population d'un village était de 1 678 habitants. Elle a diminué de 243 habitants. Quelle est la population actuelle ?

Sens « appris »

- En 2012, la population d'un village est de 1 540 habitants. Elle a augmenté de 189 habitants depuis 2010. Quelle était la population en 2010?

Raisonnement

- Lucie aime jouer aux billes. A la fin de la journée, elle a 6 billes de moins que le matin. Déjà, la journée avait mal commencé : à midi, elle avait perdu 10 billes. Que s'est-il passé l'après-midi ?

Exemple pour la division

Sens « primitif »

- Sophie a reçu 150 photos. Elle en distribue le plus possible à ses 6 amies et garde le reste pour elle. Chacune de ses amies doit en avoir le même nombre. **Combien chaque amie en aura-t-elle ? Combien Sophie en aura-t-elle ?**

Sens « appris »

- Sophie a reçu 150 photos. Elle les colle dans un album. Elle peut mettre 6 photos par page. **Combien utilisera-t-elle de pages complètes ? Combien y aura-t-il de photos sur la page incomplète ?**

Raisonnement

- Lucie compte en reculant de 6 en 6 à partir de 150 : « 150, 144, 138... ». **Combien va-t-elle dire de nombres ? Quel sera le dernier nombre prononcé ?**

Apprendre à résoudre des problèmes

- « Pour apprendre des mathématiques, il ne s'agit plus de faire résoudre des problèmes, mais d'apprendre aux élèves à les résoudre »

A - Construire une première représentation du problème

B - Développer des procédures et des stratégies de résolution

C - Qu'est-ce qui permet de mieux raisonner ?

D - Rôle de l'enseignant

A. Construire une première représentation du problème

Quelles sont les caractéristiques d'un énoncé de problème « type »? Il est à la fois:

- **Prescriptif** (Il pose une ou des questions, on répond à une commande)
- **Narratif** (Il se situe dans un contexte familier ou non)
- **Informatif** (Il fournit des données chiffrées et non chiffrées)

La **tâche** attendue est de trouver les **moyens** d'atteindre le but.

- ✓ C'est le **raisonnement** qui permet d'accroître l'information initiale **en produisant de nouvelles informations** à partir de celles déjà connues pour aboutir à celles demandées.
- ✓ Il y a plusieurs cheminements qui conduisent à la solution.
- ✓ L'élève doit donc chercher à déterminer ce chemin dans un espace de recherche c'est à dire **comprendre l'énoncé.**

Qu'est-ce que comprendre un énoncé de problème ?

Comprendre un énoncé, c'est **produire des inférences**.

Lire un énoncé, c'est déjà commencer à **construire une représentation** qui va évoluer au cours de la recherche pour devenir de plus en plus proche **d'un modèle** de résolution.

Le problème que résolvent les élèves n'est pas le même que celui de l'enseignant : **c'est celui qu'ils se formulent à eux-mêmes**.

La représentation que l'élève se donne est le résultat d'un processus **d'interprétation** qui le conduit à :

- **sélectionner** certaines informations en accordant une signification particulière,
- **éliminer** le plus possibles de données qui ne semblent pas **essentiels**,
- coordonner les informations retenues pour pouvoir en tirer des **inférences**.

Pour pouvoir s'engager dans une activité si complexe l'élève doit inférer des informations non fournies dans le texte initial à l'aide d'un calcul ou d'un cheminement logique.

Quelles difficultés peuvent intervenir ?

ANALYSE D'ÉNONCÉS

- ✓ Place de la question
- ✓ Ordre des données
- ✓ Complexité du texte
- ✓ Caractère plus ou moins complet des données
- ✓ Caractère plus ou moins familier de la situation
- ✓ Vocabulaire univoque ou non
- ✓ Informations données sous plusieurs formes
- ✓ Capacités à faire des inférences
- ✓ Problème fermé ou problème ouvert

ACTIVITÉS QUI PEUVENT AIDER À AMÉLIORER LES CAPACITÉS À CONSTRUIRE UNE PREMIÈRE REPRÉSENTATION DE LA SITUATION

Travailler au niveau du vocabulaire

- Réserver des supports (cahier, carnet, lexique ...) sur lequel on écrit avec les élèves les différents sens d'un même mot selon le contexte dans lequel il est employé en précisant qu'en mathématiques ce mot a plutôt telle signification.
- Construire et faire utiliser un lexique comme outil.
- Illustrer un même mot dans des contextes différents.
- Favoriser l'utilisation de synonymes.

Conduire l'élève à se recentrer sur la question

- Proposer des problèmes sans question
- Commencer par la question
- Faire émerger des questions par toute la classe.

Travail sur l'énoncé

- Reconstituer un puzzle d'énoncés
- Surligner, souligner les informations utiles.
- Trier ce que l'on sait, de ce que l'on cherche.
- Reconstituer un énoncé
- Ecrire ou compléter un énoncé
- Trouver une histoire qui puisse se traduire par une écriture arithmétique
 $(2 \times 3) + 5 = \dots$
- Convertir un texte en schéma et inversement.
- Proposer des énoncés avec des tableaux, des graphiques, des figures géométriques.

B. Développer des procédures et des stratégies

- **Stratégies**

- Mathématiser le problème
- Chercher tous les possibles
- Rechercher des analogies

- **Procédures**

- Appliquer une formule (calcul)
- Tâtonnement (qui peut être organisé)
- Rechercher des sous-buts (problème analogue mais plus simple).

- Il est important que dès l'école primaire, les élèves soient confrontés à **différentes procédures et stratégies** afin de :
- **Faire des hypothèses, les tester**
- **Elaborer une démarche** pertinente afin de produire une solution personnelle
- **Vérifier** par eux-mêmes les résultats obtenus
- **Formuler** une réponse dans les termes du problème
- **Expliquer** leurs méthodes, les mettre en débat, argumenter
- Etre capable de **réinvestir** des stratégies en reconnaissant des situations.

C. Qu'est-ce qui permet de mieux raisonner ?

Chez tous les élèves, une tendance naturelle consiste à **raisonner par analogie**; c'est à dire à importer dans une situation nouvelle, des procédures connues pour réaliser les mêmes buts, d'une situation qu'il a jugé analogue ou similaire. (...)

Souvent, ce transfert produit des erreurs mais ces **erreurs permettent de modifier la représentation** pour la restructurer d'une autre manière.

Ce changement de point de vue est le plus difficile à mettre en œuvre dans la résolution de problèmes.

- Abandonner des voies qui ne semblent aller nulle part, transformer sa représentation initiale et favoriser la mobilisation de nouvelles connaissances exige de l'élève **des capacités de décentration par rapport à l'action**.
- Favoriser tout à tour l'action des élèves et leur distanciation vis-à-vis de cette action pour pouvoir penser autrement, relève d'une véritable gymnastique pour l'enseignant !

- ❖ Le but est de favoriser chez les élèves la mise en œuvre d'un processus **qui va de la construction d'une première représentation**, en effectuant des allers et retours entre diverses structurations et opérationnalisations, jusqu'à aboutir à **l'élaboration d'un modèle** en faisant appel à des **outils mathématiques**.
- ❖ On va chercher à **donner des repères** aux élèves pour caractériser des classes de problèmes qui leur serviront de **référence** face à un problème dont le modèle ne leur est pas connu.

On doit donc placer l'élève face à des situations variées

- Ne pas proposer que des exemples qui confirment la règle !
- Ne pas faire croire aux élèves que ce qui est le plus important est ce que l'on tape sur la calculette ...

Ne pas automatiser des procédures mais chercher à favoriser un raisonnement

Les bases

A/ Varier

- **La mémoire** des problèmes déjà rencontrés aide à résoudre des problèmes nouveaux.
- Le nombre important **de problèmes différents** mais de **structures similaires** est un facteur déterminant pour aider les élèves à établir des analogies.
- Les **schémas** améliorent la mise en mémoire. Par la **simplification** qu'ils opèrent, les schémas favorisent la **sélection de l'information** pertinente tout en représentant les **étapes du raisonnement**.

B/ Verbaliser

- Lire et expliquer les énoncés et les consignes
- Ecouter, observer les procédures des élèves pour relancer
- **Favoriser les explications par les élèves eux-mêmes**
- Gestion des échanges par l'enseignant
- Expliquer et justifier ses choix, sa démarche **s'apprend progressivement**

C/ Ouvrir

Les **problèmes ouverts** peuvent **favoriser la flexibilité de la pensée** si importante en mathématique.

Ce travail permet de confronter les élèves à des **activités de recherche** propres aux mathématiciens puisqu'ils ne disposent **pas de méthodes toutes prêtes.**

En résumé Qu'est-ce qui permet de mieux raisonner

1 - Changer de représentation

2 - Modéliser la représentation

3 - S'appuyer sur la multi-représentation d'un même problème

4 - Recourir aux schémas

5 – Verbaliser

6 - Proposer des problèmes ouverts

D. Rôle de l'enseignant

- Pendant une séance de « problème pour chercher » le maître n'apporte aucune aide sur la résolution du problème, ce qui ne veut pas dire qu'il est totalement absent de l'activité.
- Le maître ne doit pas aider personnellement les élèves afin qu'ils n'attendent pas une aide systématique de sa part.
- Enrôlement dans la tâche / Maintien de l'attention Pour réfléchir, **je m'arrête**, je ne me précipite pas sur l'action.
- Donner l'envie d'avoir l'audace de réussir
« *Je suis nulle, je ne sais pas faire* » « *Je n'y comprends rien* » « *C'est trop dur* »
- Se positionner en tant que personne ressource aidante et guidante.
« *Tu vas y arriver parce que je vais t'aider et plus tard tu réussiras sans moi.* »
Encourager : « *Vous êtes sur la bonne piste* » « *Vous êtes bien partis mais il y a d'autres possibilités* » « *Votre démarche est bonne mais il manque une contrainte* »
- Faire les mises en commun
- Relancer par un questionnement ou des indices.

- **Faire repérer** progressivement les points importants, pertinents.
- **Surligner** les données qui permettent la résolution du problème.
- Pour certains **prendre en charge** une partie de la résolution : allègement cognitif, « simplification de la tâche »
- **Traduire** ces informations en langage mathématique en cherchant tous les possibles.
- A partir de ces données, **chercher d'autres indices** qui vont permettre de choisir parmi les possibles trouvés.
- **Diminuer l'aide.**
- Constituer des **écrits de référence** des méthodologies employées.
- **Réinvestir** ces méthodologies dans plusieurs problèmes du même type.

Travail de l'enseignant et des élèves

- Recherche à la charge des élèves
- Moments d'explicitation des solutions et d'argumentation entre élèves sur leur validité
- Validation par les élèves (matérielle ou par arguments convaincants)
- Synthèse par l'enseignant : généralisation, éléments à retenir, langage...
- Traces écrites (références)
- Entraînement sur la connaissance mise en place

Apprentissage par résolution de problèmes (4 schémas)



Investigation

Connaissances anciennes : limites, insuffisances

Tentatives nouvelles

Rétroaction de la situation



Confrontation

Explicitation

Controverse, argumentation

Appropriation d'autres stratégies

Elève



Enseignant

Mise en évidence, généralisation

Apport : stratégie, langage, mise en forme...

Réponses aux questions

Elève



Situations

Exercices, entraînement

Evaluation

Adaptation des connaissances